

12. Soustavy dvou lineárních rovnic se 2 neznámými

- SOUSTAVY TVARU (po ekvivalenčních úpravách)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad \begin{matrix} a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{koefficienty} \\ x, \dots \text{neznámá} \end{matrix}$$

- EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY SOUSTAV ROVNIC (platí i pro více rovnic a neznámých)

USR1 Ekvivalenční úpravy jednorádkových rovnic (vzdálené násobení, množení celky)

USR2 Násobení libovolné rovnice součtem/dílem rovnic a libovolné jiné ke soustavě

USR3 Rozklad neznámé nebo výrazu s neznámou x jedné rovnice do jiné

USR4 Vynásobení rovnic, která je násobkem jiné rovnice

- METODY ŘEŠENÍ: SČÍTACÍ (GAUSSOVA ELIMINAČNÍ), KOMPARAČNÍ (POROVNÁVACÍ)

- POČET ŘEŠENÍ:

1 ŘEŠENÍ

NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

ŽÁDNÉ ŘEŠENÍ

} do min. všech řešení patří každá uspořádaná dvojice $[x_0, y_0]$, která je řešením VŠECH ROVNIC SOUSTAVY

Příklady

① Řešení $R \times R$

a) $3u + 2v = -4$ 1.3

$2u - 3v = 19$ 1.2

$9u + 6v = -12$

$4u - 6v = 38$

$13u = 26$

$u = 2$

dos. do lib. ke soustavě a vyp. v

$3 \cdot 2 + 2v = -4$

$2v = -4 - 6$

$2v = -10$

$v = -5$

$\mathcal{K} = \{ [2, -5] \}$

SČÍTACÍ (USR 2)

b) $2x + 4y = 0$

$5y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$

$2x + 4 \cdot (-\frac{3}{5}) = 0$

$2x - \frac{12}{5} = 0$

$2x = \frac{12}{5} \quad | :2$

$x = \frac{6}{5} \quad \left[x = \frac{6}{5}, 2 = \frac{6}{5} \cdot 2 \right]$

$x = \frac{6}{5}$

$\mathcal{K} = \{ [\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}] \}$

DOSAZOVACÍ (USR 3)

c) $u - 2v = \sqrt{2}$

$2u + v = 3\sqrt{2}$ 1.2

$u - 2v = \sqrt{2}$

$4u + 2v = 6\sqrt{2}$

$5u = 7\sqrt{2}$

$u = \frac{7\sqrt{2}}{5}$

$v = 3\sqrt{2} - 2 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{5}$

$v = 3\sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{5}$

$v = \frac{15\sqrt{2} - 14\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$\mathcal{K} = \{ [\frac{7\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}] \}$

SČÍTACÍ

POROVNĚJ
OBE ŘEŠENÍ

$u - 2v = \sqrt{2} \Rightarrow u = \sqrt{2} + 2v$

$2u + v = 3\sqrt{2}$

$2(\sqrt{2} + 2v) + v = 3\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} + 4v + v = 3\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} + 5v = 3\sqrt{2}$

$5v = \sqrt{2}$

$v = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$u = \sqrt{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{5}$

$u = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{5}$

$u = \frac{7\sqrt{2}}{5}$

DOSAZOVACÍ

② Řešit v $R \times R$

POZOR NA TYTO PŘÍPADY!

a) $5x - 2y = 3$ i. (2) $D = R \times R$

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = 6 \\ -10x + 4y = -6 \\ \hline 0x + 0y = 0 \\ (0=0 \text{ je}) \end{array}$$

NEJEDNÁ O MNOHO ŘEŠ., ale jakýchkoli
- 1 rce je násobkem druhé
=> JEDNU RCI LZE VYNECHAT
=> 1 RCE SE 2 NEZNÁMÝMI
(řešení viz čl. 11)

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \\ -2y = 5x - 3 \\ 2y = 3 - 5x \\ y = \frac{5x-3}{2} \end{array}$$

$$\mathcal{K} = \{[x, y]; x \in R \wedge y = \frac{5x-3}{2}\}$$

[mimo lru vyj. x a pak $y \in R$]

3. zp. - VIDÍM, ŽE 1 RCE JE NÁSOBKEM Druhé => LZE JEDNU RCI VYNECHAT

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \quad \text{i. (2)} \\ 10x - 4y = 6 \\ 10x - 4y = 6 \\ 10x - 4y = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jedna rce násobkem} \\ \text{druhé} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \\ -2y = 3 - 5x \\ 2y = 5x - 3 \\ y = \frac{5x-3}{2} \end{array}$$

$$\mathcal{K} = \{[x, y]; x \in R \wedge y = \frac{5x-3}{2}\}$$

b) $5x - 2y = 3$ i. (-2) $D = R \times R$

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = 5 \\ -10x + 4y = -6 \\ \hline 0x + 0y = -1 \\ (0 \neq -1) \end{array}$$

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

$5x - 2y = 3 \Rightarrow 2y = 5x - 3$

$10x - 4y = 5 \Rightarrow 4y = 10x - 6$

$10x - (10x - 6) = 5$

$0x + 6 = 5$

$0x = -1$

$(0 \neq -1)$

$\mathcal{K} = \emptyset$

$5x - 2y = 3$ i. 2

$10x - 4y = 5$

$10x - 4y = 6$

$10x - 4y = 5$

na L straně
stejná výrazky,
na P různé

=> SPOR - NEZJE

$\mathcal{K} = \emptyset$

KOMPARAČNÍ
(POROVNÁVACÍ)

$5x - 2y = 3 \Rightarrow 2y = 5x - 3$

$10x - 4y = 6 \Rightarrow 4y = 10x - 6$

$10x - 2(5x - 3) = 6$

$10x - 10x + 6 = 6$

$0x = 0$

$(0=0 \text{ je})$

$x \in D = R$ lib $y = \frac{5x-3}{2}$

$\mathcal{K} = \{[x, y]; x \in R \wedge y = \frac{5x-3}{2}\}$

$\mathcal{K} = \{[x, \frac{5x-3}{2}]; x \in R\}$

- KDYBY VYŠLO (př. vyj. x)
 $0y = 0 \Rightarrow y \in R \wedge x = \frac{3+2y}{5}$
 $\mathcal{K} = \{[x, y]; y \in R \wedge x = \frac{3+2y}{5}\}$

- U DOSAZ. METODY LZE UŽÍT
DOSAZENÍ NÁSOBKU NEZNÁMÉ

$5x - 2y = 3 \Rightarrow 2y = 5x - 3$

$10x - 4y = 6 \Rightarrow 4y = 10x - 6$

$10x - 2(5x - 3) = 6$

$10x - 10x + 6 = 6$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

$0x = 0$

③ Řeš v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) $3(x+4) - 2(x+y) = 4$
 $5(x-y) + 6(x-2) - 2 = 0 \quad | +2$

2.5
 dosaz.

$$3x + 12 - 2x - 2y = 4 \quad | -8$$

$$5x - 5y + 6x - 12 = 2 \quad | +12$$

$$x - 2y = -8 \Rightarrow x = 2y - 8$$

$$11x - 5y = 14$$

$$11(2y - 8) - 5y = 14$$

$$22y - 88 - 5y = 14 \quad | +88$$

$$17y = 102$$

$$y = 6$$

$$x = 2 \cdot 6 - 8$$

$$x = 4$$

$$\mathcal{K} = \{[4, 6]\}$$

b) $(x+4)(y-2) - (x-5)(y+4) = 0$

$$(x+6)(y-1) - (x-1)(y+2) = 0$$

$$xy - 2x + 4y - 8 - (xy + 4x - 5y - 20) = 0$$

$$xy - x + 6y - 6 - (xy + 2x - y - 2) = 0$$

$$xy - 2x + 4y - 8 - xy - 4x + 5y + 20 = 0$$

$$xy - x + 6y - 6 - xy - 2x + y + 2 = 0$$

$$-6x + 9y + 12 = 0$$

$$-3x + 7y - 4 = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$-6x + 9y + 12 = 0$$

$$6x - 14y + 8 = 0$$

$$-5y + 20 = 0$$

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

$$-3x + 7y - 4 = 0$$

$$7 \cdot 4 - 4 = 3x$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

$$\mathcal{K} = \{[4, 8]\}$$

c) $\frac{1}{3}(2x-3y) - \frac{1}{4}(x-2y+3) = 3$

$$\frac{2}{4}(x+1) + \frac{1}{3}(4x-2y-3) = 6+y$$

$$\frac{2x-3y}{3} - \frac{x-2y+3}{4} = 3 \quad | \cdot 12$$

$$\frac{3(x+1)}{4} + \frac{4x-2y-3}{3} = 6+y \quad | \cdot 12$$

$$4(2x-3y) - 3(x-2y+3) = 36$$

$$9(x+1) + 4(4x-2y-3) = 12 \cdot 6 + 12y$$

$$8x - 12y - 3x + 6y - 9 = 36 \quad | +9$$

$$9x + 9 + 16x - 8y - 12 = 72 + 12y \quad | +12 - 12y - 9$$

$$5x - 6y = 45$$

$$25x - 20y = 45 \quad | :5$$

VELKÁ ČÍSLA
 (NEHÁJTE RÁDI)

$$5x - 6y = 45$$

$$5x - 4y = 15 \Rightarrow 5x = 15 + 4y$$

$$15 + 4y - 6y = 45$$

$$-2y = 30$$

$$y = -15$$

$$5x = 15 + 4 \cdot (-15)$$

$$5x = -45$$

$$x = -9$$

$$\mathcal{K} = \{[-9, -15]\}$$

④ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) $0x + 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$-x - y = 0$

$-x - \frac{1}{3} = 0$

$x = -\frac{1}{3}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] \right\}$

b) $\sqrt{2}x + 2y = -2$

$3x + 0y = 4 \Rightarrow 3x = 4$

$x = \frac{4}{3}$

$\sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} + 2y = -2$

$2y = -2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad | :2$

$y = -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$y = -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{4}{3}, -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right] \right\}$

c) $4x = 5 + 2y$

$6 + 2y = 4x$

$6 + 2y = 5 + 2y$

$0y = -1$

$(0 = -1 \text{ nesp.})$

$\mathcal{K} = \emptyset$

d) $y + 2x\sqrt{3} = 1 \quad | \cdot (-2)$

$2y + 2x\sqrt{3} = 3$

$-2y - 2x\sqrt{3} = -2$

$2y + 2x\sqrt{3} = 3 \quad \oplus$

$0x = 1$

$(0 = 1 \text{ nesp.})$

$\mathcal{K} = \emptyset$

e) $2x - 3y = 1$

$-x + \frac{3}{2}y = -\frac{1}{2} \quad | \cdot 2$

$2x - 3y = 1 \quad \oplus$

$-2x + 3y = -1$

$0x + 0y = 0 \quad \text{ne}$

$\Rightarrow$ 1 rovnice pro 2 neznámé.

$\Rightarrow$ vyj. jednu neznám. a $y \in \mathbb{R}$ lib.

$2x = 1 + 3y$

$x = \frac{1+3y}{2}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{1+3y}{2}, y \right], \text{ kde } y \in \mathbb{R} \right\}$

nebo

$\mathcal{K} = \left\{ [xy], y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{1+3y}{2} \right\}$

f) $\frac{u}{v} - 5 = 0 \quad | \cdot v$

$[v \neq 0] \quad \mathbb{R}_v = \mathbb{R} - \{0\}$

$\frac{u+2v}{v} = 7 \quad | \cdot v$

$u = 5v$

$u+2v = 7v$

$5v+2v = 7v$

$0v = 0$

$(0 = 0 \text{ pl.})$

nekonec. mno. řeš.

volíme $u \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 5v = u$

$v = \frac{u}{5}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[u, \frac{u}{5} \right], u \in \mathbb{R} \wedge v = \frac{u}{5} \right\}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[u, \frac{u}{5} \right], u \in \mathbb{R} \right\}$

⑤ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

POZOR NA NEZNÁMOU VE JHENOVA TELI

$\frac{x+1}{y+1} = \frac{3}{4} \quad | \cdot 4(y+1)$

$[y \neq -1, x \neq -y]$

$\frac{y+1}{x+y} = \frac{4}{5} \quad | \cdot 5(x+y)$

$4(x+1) = 3(y+1)$

$5(y+1) = 4(x+y)$

$4x+4 = 3y+3$

$5y+5 = 4x+4y$

$4x-3y = -1 \quad \oplus$

$-4x+y = -5$

$-2y = -6$

$y = 3$

$4x = 3y - 1$

$4x = 3 \cdot 3 - 1$

$4x = 8$

$x = 2$

$\mathcal{K} = \{[2, 3]\}$